L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA
E DELLE SCIENZE INTEGRATE

L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate
è un servizio che il C.R.D. "U.MORIN" vuole rendere agli insegnanti della scuola italiana per il miglioramento dell'insegnamento della matematica e, in senso interdisciplinare, delle altre scienze.

VOL.20B N.1
FEBBRAIO 1997

Questo periodico è iscritto all'Unione Stampa Periodica Italiana

ISSN 1123-7570

Reg. Bassano del Grappa
N. 4/78 r.p. 21-7-78

Spedizione in abb. postale
P.T. - Vicenza / 50 %

Stampa :
Tipografia Battagin
San Zenone degli Ezzelini

La rivista è distribuita gratuitamente ai Soci.

Questa rivista viene pubblicata grazie ad un contributo del C.N.R. e con l'aiuto degli Istituti Filippin dei Fratelli delle Scuole Cristiane.

CENTRO RICERCHE DIDATTICHE "UGO MORIN"

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL.20B N.1 FEBBRAIO 1997

Direttore responsabile
Candido Sitia
via S. Giacomo, 4
31010 Paderno del Grappa TV
(0423) 930549 (VOCE, FAX, SEGRETERIA)
e-mail old.boy@nsoft.it

Casa Editrice
Giovanni Battagin, Editore
Via dell'Artigianato, 2
31020 S.Zenone Degli Ezzelini TV
Tel. (0423)968234(r.a.)
Telefax (0423) 968250

Segreteria Morin
via S. Giacomo, 4
31010 Paderno del Grappa TV
(0423) 930549 (VOCE, FAX, SEGRETERIA)
e-mail crdm@nsoft.it

Proprietà
C.R.D. "U.MORIN"
31010 Paderno Del Grappa TV
w³.nsoft.it/civica/filippin/morin.htm

Indirizzi di riferimento per richieste al Centro

Elementari

Gabriella Cimenti, Viale Bassani, 84 - 36016 THIENE VI - Tel. 0445-381421
Milena Savio Basso, Via Palù, 81 - 35017 PIOMBINO PD - Tel. 049-9365351

Medie

Maria Pia D'Argenzio, Via Manzoni, 7 - 31030 DOSSON TV - Tel. 0422-380478
Luigi Todisco, Via Tisanella, 62 - 33053 LATISANA UD - Tel. 0431-50925

Superiori

Silvano Rossetto, Via Primo Maggio, 11 - 31052 MASERADA TV - Tel. 0422-778423
Candido Sitia - Sede

INDICE
SEZ.B

Pag.

PRESENTAZIONE

Questo numero inizia con un articolo un po' provocatorio (fin dal titolo) di Manara sull'obbrobrio delle figure e dei disegni che "adornano" tanti libri di testo. Al suo articolo fa eco un articolo, tratto dalla rivista francese "Bulletin de l'APMEP"[1], (a cui desideriamo esprimere tutta la nostra gratitudine per averci gentilmente concesso di tradurre e stampare i suoi articoli), del prof. M.Rousselet su come avviare un insegnamento di prospettiva Cavaliera nella scuola media (francese !).

Le colleghe Bassani e Genoni hanno scritto una interessante relazione su un'applicazione del metodo di Eulero nella risoluzione di un'equazione differenziale in una classe di V° I.T.I.

Nuzzi offre ai colleghi una sua rielaborazione delle idee fondamentali delle funzioni ellittiche - che hanno avuto molta importanza recentemente nella dimostrazione del teorema di Fermat - da un punto di vista storico. Si tratta di un lavoro non direttamente didattico ma di formazione culturale degli insegnanti.

Infine, il gruppetto Artico, Rossetto, Sitia e Testa, continuando l'angolo dei problemi che ha avuto un discreto successo l'anno scorso, anche con l'intervento di soluzioni fornite da studenti, offre ai lettori una cinquina di problemi da risolvere. Le soluzioni dei problemi rimanenti del 1996, sono rimandate al numero di aprile, per mancanza di spazio. Vorremmo anche inaugurare una rubrica - gestita dai Lettori - intitolata "Domande dei Lettori", ma ne riparleremo sul numero di aprile.

- Nelle ISTRUZIONI PER GLI AUTORI avevamo escluso lavori preparati, scritti e illustrati in Macintosh : in questi giorni siamo riusciti ad avere a disposizioni una macchina Macintosh ad elevate prestazioni e quindi coloro che ci mandano i dischetti formattati e preparati in tale sistema operativo possono farlo tranquillamente.
- Il Seminario annuale, come avevamo preannunciato, dovremo tenerlo a Possagno presso l'Istituto dei Padri Cavanis, come alcuni anni fa. Nei prossimi numeri daremo informazioni più dettagliate sul programma, sulle disponibilità alberghiere e sulle vie d'accesso.

La Presidenza

[1] Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public

L'EFFETTO GIGO IN GEOMETRIA

Summary : The term "GIGO" means - in computer science - "Garbage In-Garbage Out" and is referred to some graphic reproduction we find in our textbooks particularly. The paper intends rehabilitate the foundations of the descriptive geometry that very often are forgotten by the computer graphic users and many authors of text books.

Carlo Felice Manara

L'EFFETTO GIGO IN GEOMETRIA

Carlo Felice Manara
Milano

1 - Il computer e l'effetto GIGO.

Mi è capitato di imbattermi nella sigla GIGO parlando con cultori di informatica; pare che tale sigla sia l'acrostico di una frase inglese: "Garbage In, Garbage Out", che potrebbe essere tradotta con la frase italiana: "[Nel computer] se entra spazzatura, esce spazzatura"; e mi sembra che ciò sia un valido monito, espresso in forma umoristica, per chi crede che con il computer si possano creare delle informazioni inesistenti, o per chi voglia celare dietro l'impiego del computer qualche carenza di elaborazione teorica.

Frequenti casi di effetto GIGO si verificano quando lo strumento informatico viene impiegato per calcoli, e si forniscono informazioni illusorie (e quindi spesso errate), che sono ottenute per via elettronica: per esempio fornendo i risultati di un calcolo numerico con una approssimazione superiore a quella dei dati; come se la macchina avesse il magico potere di conferire alle informazioni iniziali quella accuratezza che esse non posseggono.

In altra sede (1) ho riportato il caso, a me accaduto, dell'incontro con il piccolo imprenditore, matematico dilettante, il quale era lieto di poter proporre alla scienza mondiale un nuovo valore della costante di Archimede [il "pigreco"], valore che egli credeva di aver ottenuto impiegando (ovviamente male) il suo computer; e proprio l'impiego dello strumento magico lo rendeva assolutamente certo del risultato, e speranzoso della gloria scientifica.

Dovetti richiamarlo alla realtà, dicendogli che anche presso gli antichi pagani i responsi degli oracoli dovevano essere interpretati, a scanso di guai; e che ciò va fatto anche per i responsi dei computer, che sono per qualcuno i nuovi feticci della nostra epoca.

L'osservazione di certa manualistica mi ha convinto che si possa avere l'effetto GIGO anche in geometria: infatti, in relazione a quei disegni che nella trattatistica vengono abitualmente chiamati "figure", mi è capitato di leggere in certe pubblicazioni: "Le figure sono state tracciate con il computer"; una frase questa che ha tutta l'aria di essere una difesa preventiva. Difesa che spesso si rivela necessaria, anche se inefficace.

Ritengo infatti che, in geometria, la figura sia destinata a fornire informazioni; allora o si dice esplicitamente che il disegno ha un significato puramente convenzionale e simbolico, oppure la figura stessa pretende di dare informazioni in modo rigoroso, secondo le regole della geometria descrittiva; ma allora queste regole debbono essere rispettate, perché, altrimenti le figure sarebbero inutili o addirittura fuorvianti.

Nello spirito dei metodi della geometria descrittiva, il disegno che vorrebbe rappresentare sul piano, con certe convenzioni, un oggetto che sta nello spazio, viene ottenuto con una operazione di proiezione; quindi le informazioni che si ottengono dal disegno riguardano ovviamente certe proprietà degli oggetti geometrici che sono invarianti per proiezioni.

Pertanto mi pare singolare il fatto che, mentre nei programmi di insegnamento compaiono capitoli dedicati alla "Geometria delle trasformazioni", si trascurino nella didattica le occasioni per applicare proprio quelle idee, che costituiscono le radici culturali remote della presenza di tali capitoli.

E' noto che le regole della geometria descrittiva si fondano, ovviamente, su certi risultati di geometria proiettiva elementare; ma questa dottrina non viene quasi più insegnata nei corsi universitari, e viene quasi ovunque sostituita da contenuti di algebra lineare, dal suo linguaggio e dai suoi algoritmi. Ciò forse anche in conseguenza dell'atto di morte della geometria, stilato negli ultimi decenni da personaggi autorevoli ; ma se anche tale atto di morte rispondesse a verità (cosa che io non credo), personalmente ritengo che proprio ai morti si debba rispetto, soprattutto se ci hanno lasciato dei messaggi validi (2).

2.- L'assonometria cavaliera.

Ho detto poco sopra che la rappresentazione di oggetti dello spazio su un piano mediante disegni si fonda su idee e metodi della geometria proiettiva. Ed ho aggiunto che questa dottrina è ormai ignorata da molti; quindi nelle pagine che seguono cercherò di utilizzare in prevalenza dei metodi della geometria analitica dello spazio, rimandando alla fine di questo scritto i richiami di geometria proiettiva. Mi limiterò a trattare alcuni argomenti particolari, che tuttavia riguardano delle figure che si possono osservare con molta frequenza.

Fissiamo nello spazio un sistema cartesiano ortogonale monometrico; sia O l'origine degli assi, e chiamiamo X, Y, Z le coordinate (ovviamente reali) di un punto dello spazio. Scegliamo come centro di proiezione C un punto improprio, e supponiamo che questo corrisponda al punto all'infinito della retta avente coseni direttori proporzionali ai numeri:

(1) $$1, b, c;$$

con

(2) $$b, c > 0.$$

Scegliamo poi come piano del disegno (quello che si suol chiamare "quadro") il piano degli assi Y e Z; questa scelta porta alla tecnica di rappresentazione che veniva chiamata "prospettiva oppure assonometria cavaliera"(3). Fissiamo poi l'asse delle Y in modo che sia orizzontale rispetto ad un osservatore che guarda il quadro, e sia orientato, secondo il solito, da sinistra a destra (sempre rispetto a quell'osservatore); ed in modo che la rotazione che porta la parte positiva dell'asse delle Y sulla parte positiva dell'asse delle Z sia un quarto di giro, percorso in senso antiorario. Sia OX* la proiezione da C dell'asse delle X. Orientiamo quella proiezione in modo che l'osservatore possa immaginare che la parte positiva dell'asse delle X "esca" dal quadro, venendo verso l'osservatore stesso.

Sia P_1 un punto dello spazio e siano X_1, Y_1, Z_1 le sue coordinate rispetto al sistema cartesiano fissato. La retta che passa per P_1 e per C è rappresentata in forma parametrica da equazioni del tipo:

(3) $$\begin{aligned} X &= X_1 + t \\ Y &= Y_1 + bt \\ Z &= Z_1 + ct. \end{aligned}$$

Il punto d'intersezione di questa retta col quadro si ottiene ovviamente ponendo:

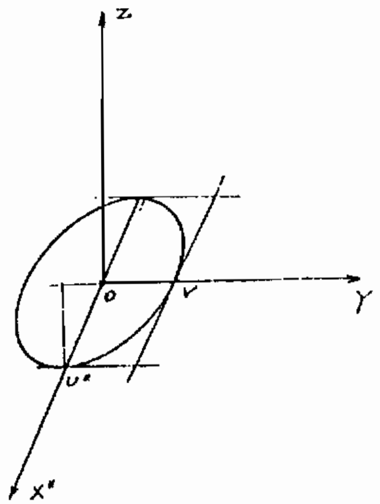
(4) $$X = 0$$

nelle (3). In particolare il punto U*, che è la proiezione da C sul quadro del punto unità U sull'asse delle X, di coordinate:

(5) $$X_1 = 1 \; ; \; Y_1 = Z_1 = 0$$

ha sul quadro le coordinate:

(6) $Y = -b \quad ; \quad Z = -c$



[fig. 1],

e la retta OX* di equazione:

(7) $$cY - bZ = 0,$$
che contiene il punto U*, è proiezione dell'asse X sul quadro.

Invece il punto unità V sull'asse delle Y ha coordinate

(8) $$Y = 1 \; ; \; Z = 0,$$
perché, ovviamente i punti del quadro sono i soli le cui immagini coincidono con le proiezioni.

Supponiamo ora che il punto P_1 dello spazio appartenga alla circonferenza che ha il centro nell'origine, raggio unitario, e giace nel piano:

(9) $$Z = 0;$$

in queste ipotesi le coordinate di P_1 sono legate dalle relazioni:

(10) $$Z_1 = 0 \ ; \ (X_1)^2 + (Y_1)^2 = 1.$$

Introducendo questi valori nelle (3), tenendo conto della (4) ed eliminando il parametro t si ottiene, dopo poche riduzioni, l'equazione:

(11) $$Z^2 + (cY - bZ)^2 = c^2.$$

Questa rappresenta una ellisse, che ha il suo centro nell'origine O degli assi Y e Z ed è la proiezione sul quadro della circonferenza (10) dello spazio. Le due rette (7) e (9) sono diametri coniugati dell'ellisse (11); ciò significa, tra l'altro, che le tangenti all'ellisse nei punti U* e V sono rette parallele rispettivamente alle rette (7) e (9).

Nel paragrafo 4 daremo un cenno delle proprietà delle coppie di diametri coniugati che più interessano qui; ora ci limitiamo ad osservare che la situazione rappresentata nella fig.1 è ben diversa da quella data nella fig.2; questa compare talvolta in certi testi (anche purtroppo a livello universitario !), testi in cui spesso si legge l'affermazione che le figure sono disegnate con il computer. Non metto in dubbio l'affermazione, nè la buona intenzione degli Autori, ma non posso evitare di pensare che questi casi siano una chiara manifestazione dell'effetto GIGO.

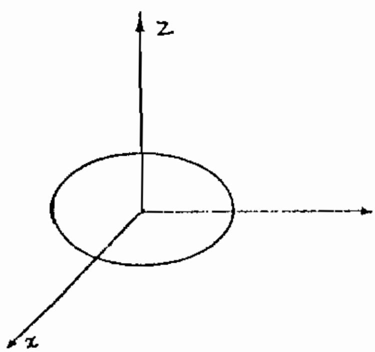


Fig. 2

3 - I solidi nello spazio ed il contorno apparente.

Oltre alla frequente presentazione di figure analoghe alla 2, i pretesi esperti di geometria che utilizzano i computer si slanciano spesso a rappresentare dei solidi. Come prima, esamineremo alcuni casi in cui si tenta di utilizzare i metodi della prospettiva cavaliera. Per fissare le idee, immaginiamo un oggetto solido (e quindi non trasparente) che viene visto dal punto improprio C, già preso in considerazione.

Si osserva allora che esiste una superficie cilindrica, le cui generatrici (parallele tra loro) passano per il punto C e sono tangenti all'oggetto; su questo i punti di contatto delle generatrici in parola costituiscono una curva, che viene chiamata "contorno apparente" dell'oggetto dal punto di vista C; in corrispondenza al contorno apparente (del solido) esiste una seconda curva, che è la sua proiezione sul quadro da C. Supponiamo che il solido sia un poliedro, oppure sia uno di quei solidi rotondi che vengono studiati in geometria elementare (per esempio sfera, cilindro, cono rotondo ed altri analoghi). Poiché, abbiamo detto che il solido è supposto non trasparente, si conviene spesso di rappresentare sul quadro soltanto quella parte del solido che viene effettivamente vista da C, e non quindi la parte del solido che questo nasconde. Tale parte in vista è ovviamente limitata dal contorno apparente, e la sua proiezione sul quadro è limitata dalla proiezione del contorno apparente. Poniamo ora che sul solido sia tracciata una curva F, e che questa sia regolare, cioè dotata di retta tangente e di piano osculatore in ogni suo punto (esclusi al più dei punti isolati in numero finito). Chiamiamo F* la curva proiezione di F da C sul quadro, e supponiamo che essa incontri la proiezione del contorno apparente in un punto Q*; pochi calcoli elementari (che qui non riportiamo), pertinenti alla geometria differenziale (o anche soltanto alle applicazioni geometriche dell'analisi matematica) permettono di dimostrare che, in ogni punto come Q*, la curva F* è tangente alla proiezione del contorno apparente.

Daremo qualche applicazione di questo teorema, riprendendo ed ampliando l'esempio analizzato nel paragrafo precedente.

Consideriamo il cilindro infinito, le cui generatrici passano per i punti della circonferenza (10) e sono parallele all'asse delle Z. Se immaginiamo che il cilindro sia un solido, il suo contorno apparente è costituito da due generatrici, che dividono la parte del cilindro che è vista da C da quella che è nascosta all'occhio (posto in C) dal cilindro stesso.

In questo caso possiamo considerare la circonferenza (10) come una curva tracciata sul cilindro; pertanto la ellisse (11) deve essere tangente alle due generatrici del cilindro che costituiscono la proiezione del contorno apparente visto da C.

Questa osservazione permette quindi di determinare la parte della curva (11) che viene vista da C: secondo note proprietà di geometria analitica, questa parte viene determinata dalle intersezioni della curva (11) con la retta che è la polare del punto improprio dell'asse delle Z. Tale polare viene rappresentata dall'equazione:

$$Z = b(cY-bZ), \tag{12}$$

e si verifica che le tangenti alla curva (11) nei punti in cui essa è intersecata dalla retta (12),sono parallele all'asse delle Z.

Lasciamo al Lettore la verifica del fatto che lo stesso risultato poteva essere ottenuto cercando il piano polare del punto (1) rispetto al cilindro, determinando la retta d'intersezione del piano stesso con il piano Z=0 e determinando la proiezione di tale retta sul quadro con le (3).

La fig.3 fornisce la rappresentazione di un cilindro rotondo finito, generato dalla rotazione, attorno all'asse delle Z, di un segmento parallelo all'asse stesso.

Il Lettore può facilmente confrontare la rappresentazione che rispetta le regole della geometria descrittiva (in particolare il teorema relativo alla proiezione del contorno apparente) con altre illustrazioni di cui diamo qualche esempio nella fig.4; tali illu-

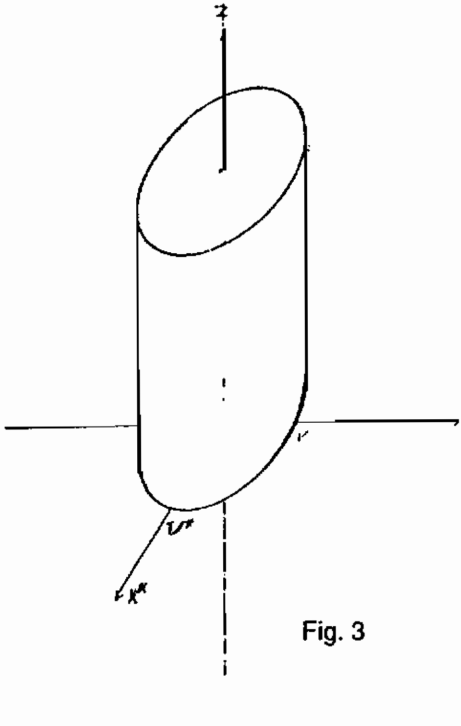


Fig. 3

strazioni potrebbero essere giudicate come patetici tentativi di rappresentare rispettivamente un cilindro rotondo ed la sfera terrestre, con i poli ed i meridiani; il Lettore potrà anche constatare personalmente la molesta diffusione dell'effetto GIGO nella manualistica.

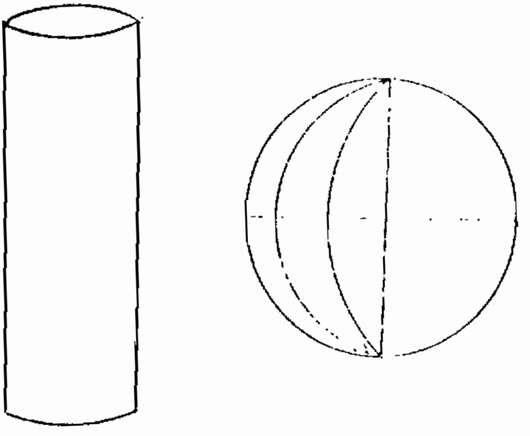


fig.4

4 - Diametri coniugati dell'ellisse.

Come abbiamo annunciato alla fine del paragrafo 2, portiamo ora la nostra attenzione sulle proprietà dell'ellisse che concernono le coppie dei suoi diametri coniugati; presenteremo una trattazione analitica delle questioni, per evitare di far riferimento a nozioni di geometria proiettiva, nozioni che, come abbiamo detto, sono oggi quasi generalmente ignorate.

Consideriamo in un piano un sistema cartesiano ortogonale monometrico, e siano ora x, y le coordinate di un punto. Sia E una ellisse, che immaginiamo rappresentata nella forma canonica abituale, riferita al centro ed agli assi; come è ben noto, con queste scelte l'equazione dell'ellisse è:

(13) $$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1.$$

Scegliamo due numeri reali p e q , tali che sia:

(14) $$p^2 + q^2 = 1;$$

per esempio poniamo:

(15) $$p = \cos\alpha; \quad q = \sin\alpha,$$

essendo α un angolo qualunque.
Costruiamo ora i due polinomi:

(16) $$u = px/a + qy/b \quad ; \quad v = qx/a - py/b.$$

Si verifica che l'equazione (13) può essere scritta nella forma:

(17) $$u^2 + v^2 = 1$$

oppure nelle due forme equivalenti:

(18) $$u^2 + (v+1)(v-1) = 0$$

(19) $$v^2 + (u+1)(u-1) = 0$$

Le rette:

(20) $$u = 0 \quad ; \quad v = 0$$

passano per il centro dell'ellisse (che - come si è detto - è in questo caso l'origine delle coordinate) e sono dette "diametri" della curva; esse sono legate da una relazione simmetrica che viene detta "coniugio", e quindi vengono chiamate "diametri coniugati" dell'ellisse.

Per analizzare ulteriormente la relazione che lega tra loro le rette (20), osserviamo che ovviamente le rette:

(21) $$u+1 = 0 \quad ; \quad u-1 = 0$$

sono parallele tra loro, e parallele entrambe alla prima delle rette (20); ed anche le rette:

(22) $v+1=0 \quad ; \quad v-1=0$

sono parallele tra loro, ed entrambe parallele alla seconda delle rette (20).

Dal confronto della (17) con la (18) si trae che ognuna delle rette (22) è tangente all'ellisse: infatti il sistema che si ottiene dalla (18) e per esempio dalla

(23) $v+1=0$

è equivalente al sistema costituito dalla (23) stessa e dalla:

(24) $u^2=0,$

e quest'ultimo sistema ha ovviamente due radici coincidenti. Analoghe considerazioni si fanno per la retta:

(25) $v-1=0,$

ed ancora analoghe considerazioni valgono per ognuna delle rette (21) in relazione all'ellisse, quando essa venga rappresentata nella forma (19).

Quindi si può considerare la corrispondenza che intercede tra due diametri quando le tangenti nei punti di intersezione dell'ellisse con uno di essi sono parallele all'altro; gli sviluppi che precedono garantiscono poi che tale corrispondenza è ovviamente simmetrica.

In particolare, se nella (13) si pone:

(26) $a=b=r,$

la (13) stessa viene a rappresentare una circonferenza di raggio r, avente il suo centro nell'origine degli assi. In questo caso le due rette (20) risultano essere perpendicolari tra loro; potremo quindi concludere che nella circonferenza, considerata come una ellisse particolare, la corrispondenza di coniugio che lega coppie di diametri è quella che fa corrispondere ad un diametro quello che gli è perpendicolare. Le proprietà che abbiamo rilevato si riducono in questo caso alle note relazioni di perpendicolarità che legano la tangente alla circonferenza in un suo punto al diametro che passa per esso [fig. 5].

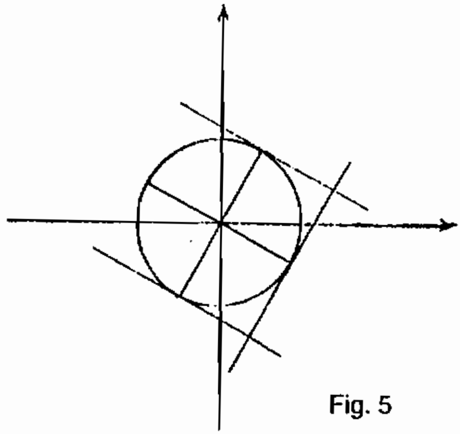


Fig. 5

Immaginiamo ora di proiettare la circonferenza da un piano su un altro, da un punto all'infinito che non appartenga ad alcuno dei due piani; se questi ultimi non sono paralleli tra loro, la curva che si ottiene in questo caso dalla circonferenza per proiezione è un'ellisse. Ma l'operazione di proiezione da un centro improprio non cambia le relazioni di parallelismo tra rette, e di tangenza tra rette e curve. Quindi con questa operazione di proiezione coppie di diametri della circonferenza che sono coniugati (e quindi perpendicolari tra loro) vanno in coppie di diametri dell'ellisse, che non sono più perpendicolari tra loro (almeno in generale) ma restano sempre coniugati tra loro, in forza dei ragionamenti che abbiamo svolto [fig. 6].

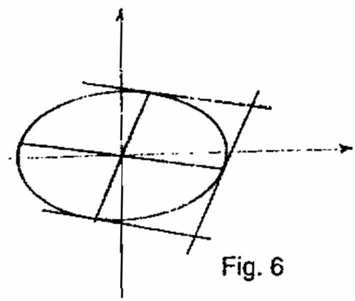


Fig. 6

NOTE

(1) C.F.Manara. Il calcolo approssimato. Dimensioni culturali e didattiche. Nuova Secondaria. Brescia. Anno XI. N. 5 (genn. 1965).

(2) Ho espresso alcune mie opinioni in proposito nella recensione a: Nicolas Bourbaki. Elementi di storia della matematica. Periodico di matematiche. Serie IV. Vol. 43.(1965).

(3) Cfr. Gino Fano. Lezioni di geometria descrittiva. Torino (1914) [Ed. Paravia]. Il trattato può essere giudicato "vecchio" da qualcuno; ma assicuro il Lettore che le leggi della geometria, ivi esposte, sono ancora valide, per quanto mi consta.